CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**

SESSION 2009

Concours : EXTERNE
Section : **Mathématiques**

DEUXIÈME ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte six pages.
L'énoncé comprend deux parties.

Ce problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des polynômes de Legendre et de Lagrange.

Dans la suite, on notera indifféremment $\frac{d^n f}{dt^n}$ ou $f^{(n)}$ la dérivée *n*-ième d'une fonction *f* et l'on acceptera l'abus de notation consistant à écrire $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ sous la forme $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$ et $f^{(n)}(t)$ sous la forme $(f(t))^{(n)}$. Par ailleurs, on notera de la même façon un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

E désigne l'espace euclidien des fonctions continues sur l'intervalle [–1 ; 1] muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)\ g(t)\ dt$.

Pour tout entier naturel *n*, $R_n[t]$ désigne l'ensemble formé des polynômes définis sur $\mathbb{R}$ de degré au plus égal à *n* ainsi que du polynôme nul.

Par convention, pour *k* entier naturel, on note t^k, la fonction polynôme $t \to t^k$.

Pour tout entier naturel *n*, on définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par $P_0(t) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\ n!}\ \frac{d^n}{dt^n}\ \left[\ \left(t^2 - 1\right)^n\ \right].$$

Partie I

1-

a. Vérifier que $P_1(t) = t$ et $P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}$.

b. Vérifier que P_n est un polynôme de degré *n*.

c. Démontrer que le coefficient dominant de P_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

d. Démontrer que $P_n(1) = 1$.

On rappelle la formule dite de Leibniz : si u et v sont deux fonctions de la variable t, n fois dérivables sur un intervalle I, alors pour tout t de I :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[\ u(t)\ \ v(t)\ \right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t).$$

e. Vérifier que la fonction dérivée d'une fonction paire et dérivable est impaire.

f. Étudier la parité de P_n et en déduire que $P_n(-1) = (-1)^n$.

2-

a. *k* étant un entier naturel inférieur ou égal à *n*, soit *f* une fonction de E, *k* fois dérivable et à dérivée *k*-ième continue.

Démontrer que $\left(f \mid P_n \right) = \frac{(-1)^k}{2^n \; n!} \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t) \left[\left(t^2 - 1 \right)^n \right]^{(n-k)} dt$.

b. Démontrer que pour tous nombres entiers naturels *n* et *m* distincts, P_n et P_m sont orthogonaux.

En déduire que pour tout nombre entier naturel *m*, $\left(P_0, P_1, ..., P_m \right)$ constitue une base orthogonale de l'espace vectoriel $R_m[t]$.

c. Démontrer que pour tout nombre entier naturel *n* non nul, P_n est orthogonal aux polynômes t^k pour $0 \le k < n$.

3- Pour tout nombre entier *n* supérieur ou égal à 2, démontrer que le polynôme défini par $(2n+1)t\,P_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)$ est de degré inférieur ou égal *n* puis que ce polynôme est orthogonal aux polynômes t^k pour $0 \le k \le n-2$.

En déduire que ce polynôme est combinaison linéaire des polynômes P_{n-1} et P_n, puis démontrer que pour tout nombre entier *n* supérieur ou égal à 2, la suite $\left(P_n(t) \right)_{n \in N}$ vérifie la relation de récurrence $(2n+1)\,t\;\; P_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + n\;\; P_{n-1}(t)$ (1).

On pourra utiliser 1-d. et 1-f.

4-

a. Démontrer que $\int_{-1}^{1} t^n \;\; P_n(t) \;\; dt = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)\;!} \;\; \left(P_n \mid P_n \right)$.

b. Démontrer que, pour tout *n* supérieur ou égal à 2, $\left(P_n \mid P_n \right) = \frac{2n-1}{2n+1} \left(P_{n-1} \mid P_{n-1} \right)$.

On pourra utiliser la relation de récurrence (1).

En déduire que, pour tout *n*, $\left(P_n \mid P_n \right) = \frac{2}{2n+1}$.

5- Soit le polynôme G_n défini par $G_n(t) = \frac{d}{dt}\left[\;\left(1-t^2\right) \;\; \frac{d}{dt}\left(P_n(t) \right) \;\right]$.

a. Préciser, pour *n* non nul, le degré du polynôme G_n et démontrer que pour $0 \le k < n$, G_n est orthogonal aux polynômes t^k. Pour $k \ne 0$, on pourra utiliser deux intégrations par parties successives et le résultat de la question 2-c.

b. Déterminer le coefficient dominant du polynôme G_n en fonction du coefficient dominant du polynôme P_n.

c. En déduire que le polynôme P_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\left(1-t^2\right)y''-2t\,y'+n(n+1)y = 0 \qquad \left(E_n\right).$$

6- Cette question a pour objet de déterminer les fonctions solutions sur [−1 ; 1] de l'équation $\left(E_n\right)$.

Pour $n \geq 1$, on appelle solution de $\left(E_n\right)$ sur]−1 ; 1[toute fonction de classe C^∞ sur cet intervalle vérifiant $\left(E_n\right)$. On note S_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de ces solutions.

a. Justifier qu'il existe deux fonctions de S_n, notées y_1 et y_2, vérifiant :

$\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_1'(0)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y_2(0)=0 \\ y_2'(0)=1 \end{cases}$ et formant une base de S_n.

b. On note $y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$ une fonction développable en série entière, de rayon de convergence non nul.

i) Montrer que : $\left(y \in S_n\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \geq 0,\ (k+2)(k+1)\alpha_{k+2}=\left[k(k+1)-n(n+1)\right]\alpha_k\right)$

ii) Montrer que , selon la parité de *n*, une des deux fonctions y_1 ou y_2 est polynomiale de degré *n* et que l'autre est développable en série entière de rayon de convergence 1.
On pourra remarquer, en donnant à k la valeur n, que $\alpha_{n+2} = 0$.

iii) En déduire que toute solution de $\left(E_n\right)$ sur]−1 ; 1[est développable en série entière

c. En notant les développements en série entière de y_1 et y_2 :

$$y_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\ t^{2k} \text{ et } y_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\ t^{2k+1}$$, montrer que :

- si *n* est pair , pour *k* > 0, $\frac{v_{k+1}}{v_k}=1-\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
- si *n* est impair, pour *k* > 0, $\frac{u_{k+1}}{u_k}=1-\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

d. Soit *y* une fonction continue sur **[**−1 ; 1], $y \in S_n$.
Montrer que si *n* est pair , il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y=\alpha\, y_1$ et que si *n* est impair , il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $y=\beta\, y_2$.
On pourra utiliser sans justification que, selon la parité de n, la limite en 1 de y_1 *ou celle de* y_2 *est infinie.*

e. Conclure en montrant que les solutions de $\left(E_n\right)$ sur **[**−1 ; 1] forment un sous espace vectoriel de dimension 1 des fonctions de **[**−1 ; 1] dans **[**−1 ; 1] et que celui-ci est engendré par P_n.

Partie II

Cette partie est assez largement indépendante de la partie I, dont on exploitera cependant le résultat démontré à la question 2c.

1-

a. Donner un énoncé du théorème de Rolle.

b. Soit *n* et *k* deux nombres entiers naturels tel que $k < n$.

Démontrer que le polynôme *P* défini par $P(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left[\left(t^2 - 1\right)^n \right]$ admet –1 et 1 comme racines d'ordre $n-k$ et *k* racines simples distinctes deux à deux dans l'intervalle]–1 ; 1[.

c. En déduire que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n admet *n* racines notées $a_1, a_2, ..., a_n$ telles que $-1 < a_1 < a_2 < ... < a_n < 1$.

2-

a. Vérifier que pour tout entier naturel *n* et tout réel *x* de l'intervalle [–1 ; 1], on peut prolonger par continuité la fonction $t \to \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}$ sur l'intervalle [–1 ; 1].

Pour tout entier naturel *n* et tout réel *x*, on désigne par Q_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\, dt .$$

b. Démontrer que pour *n* supérieur à 1, Q_n est une fonction polynôme de degré *n*–1 et que pour tout *x*, la suite $\left(Q_n(x)\right)_{n \in N}$ vérifie les conditions initiales : $Q_0(x) = 0$ et $Q_1(x) = 2$.

c. Démontrer que la suite $\left(Q_n(x)\right)_{n \in N}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $\left(P_n(x)\right)_{n \in N}$ établie à la question 3 de la partie I.

3- *n* est un nombre entier naturel non nul fixé. On note $a_1, a_2, ..., a_n$ les *n* zéros de P_n tels que $-1 < a_1 < a_2 < ... < a_n < 1$.

Pour tout nombre entier *i* compris entre 1 et *n*, soit L_i le polynôme défini par $L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - a_j}{a_i - a_j}$.

a. Pour tout nombre entier *i* compris entre 1 et *n* et pour tout nombre entier *k* compris entre 1 et *n*, déterminer $L_i(a_k)$. On distinguera le cas où *k* = *i*.

b. Démontrer que $\left(L_1, ..., L_n\right)$ constitue une base de l'espace vectoriel $R_{n-1}[t]$.

c. En déduire la décomposition de tout polynôme de $R_{n-1}[t]$ dans cette base.

d. Démontrer qu'il existe une suite $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ de *n* nombres réels et une seule telle que pour tout polynôme *P* de $R_{n-1}[t]$, $\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ P(a_i)$.

e. Démontrer que pour tout polynôme *P* de $R_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ P(a_i)$. On effectuera la division euclidienne de *P* par P_n .

f. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2$ puis que les λ_i sont strictement positifs.

On pourra prendre des polynômes P particuliers.

4- Q_n est le polynôme défini à la question 2.

Démontrer que pour tout nombre réel *x* strictement supérieur à 1, $Q_n(x) = P_n(x)\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x-a_i}$.

5- *n* est un nombre entier naturel non nul.

a. Démontrer que pour tout nombre réel *x* strictement supérieur à 1,

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}-x^{2n}}{x-t}\ dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\ a_i^{2n}}{x-a_i} - x^{2n}\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}.$$

b. En déduire que pour tout nombre réel *x* strictement supérieur à 1,

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x^{2n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\ a_i^{2n}}{x-a_i} - \int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}}{x-t}\ dt\right].$$

c. α est un nombre strictement positif.

Démontrer que pour tout nombre réel *x* tel que $x \geq 1+\alpha$,

$$\left|\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\frac{x+1}{x-1}\right| \leq \frac{3}{\alpha(1+\alpha)^{2n}}.$$

d. On pose pour tout nombre entier naturel *n* non nul , $U_n = \frac{Q_n}{P_n}$.

Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur l'intervalle $[1+\alpha, +\infty[$.

Proposition de correction de la seconde épreuve.

Remarques sur le sujet

Ce sujet est assez classique et de bonne difficulté (i.e. ni trop facile, il y a pas mal de questions classiques mais néanmoins non triviales, ni trop difficile - on peut au calme faire presque toutes les questions). Deux difficultés récurrentes dans ce sujet: les notations et la rédaction. Déjà, il faut dés le début du sujet arriver à maitriser la notion $\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ *ce qui n'est pas si simple... Par exemple, pour évaluer ce polynôme en* 1*, que faut-il écrire? Confondre la fonction* $t \mapsto t^k$ *et* t^k *simplifie certaines notations, mais alourdie la rédaction (par exemple on ne peut pas écrire* $f^{(k)}$ *mais on doit écrire* $\frac{d^k}{dt^k}(t^k)$*). Néanmoins, je ne pense pas que d'éventuelles coquilles à ce niveau soient pénalisées (sauf coquille conduisant à une erreur évidemment). Toujours concernant les notations, la gestion des indices posait aussi problème (par exemples questions* **I.2.***); en fin de partie II, nous avons deux variables (en fait, une seule cat t joue le rôle de variable muette d'intégration; néanmoins, cela peut poser quelques difficultés de manipulations).*
Seconde difficulté, la rédaction, en particulier dans les questions **I.1., I.3.***. Certaines solutions (par exemple celles utilisant une récurrence finies) ne sont pas faciles à mettre en place le jour de l'écrit (temps limité); mieux vaut alors faire une raisonnement par itération et poursuivre que de passer 20 minutes à rédiger proprement celle-ci. Par ailleurs, certaines questions demandent de très nombreuses choses à démontrer: il faut être très rigoureux pour bien justifier tout cela sans oublier de questions.*
A partir de la question **I.4.***, on pouvait avantageusement passer sur les questions difficiles pour gagner des points et se laisser suffisamment de temps pour bien entamer la* **partie II** *qui permet de retrouver un second souffle. Par exemple, dans les question* **I.6.** *les manipulations de coefficients de séries entières, bien que classiques, ne sont pas spécialement simples.*
La partie II quand à elle était assez accéssible et très largement indépendante de la précédente. Cette seconde partie, abordant les polynômes interpolateurs de Lagrange, doit être très bien maîtrisée.

Quelques remarques sur la proposition de corrigé.

En en-tête de certaines questions, j'ai fait quelques commentaires en bleu (pour la version pdf) et en italique. Certains théorèmes sont cités pour faciliter la lecture de ce corrigé, mais ne doivent pas être écrits dans une copie le jour du concours. La dernière question de la partie I semble présenter une petite erreur. Enfin, cette proposition de corrigé doit aussi en contenir: si vous en détectez une, n'hésitez pas à me la signaler à l'adresse jean-francois.culus@iufm-martinique.fr

Partie I.

1.a. Nous avons $P_1(t) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dt}(t^2-1) = \frac{1}{2}(2t) = t$.
Nous avons: $(t^2-1)^2 = t^4 - 2t^2 + 1$ d'où $\frac{d}{dt}(t^2-1)^2 = 4t^3 - 4t$ et donc $\frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^2 = 12t^2 - 4$, d'où nous déduisons que $P_2(t) = \frac{1}{2^2\times 2!}\frac{d^2}{dt^2}\left((t^2-1)^2\right) = \frac{12t^2-4}{8} = \frac{3t^2-1}{2}$.

1.b. Le polynôme $(t^2-1)^n$ est de degré $2n$. Or, si P est un polynôme à coefficients réels de degré $k>0$, alors P' est de degré $k-1$. Aussi, le polynôme $\frac{d}{dt}(t^2-1)^n$ est de degré $2n-1$. Par itération, nous déduisons que $\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n-n=n$. Le polynôme P_n est donc de degré n.

1.c. Par la formule du binôme de Newton, nous avons $(t^2-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2k}(-1)^{n-k}$. Aussi, le coefficient dominant de ce polynôme est 1. En dérivant n fois, nous déduisons que le coefficient dominant de $\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)$ est $\frac{(2n)!}{n!} = (2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times(n+1)$. Aussi, le coefficient du polynôme P_n est-il $\frac{1}{2^n\times(n!)}\times\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n\times(n!)^2}$.

1.d. Par identité remarquable, nous avons: $(t^2-1)^n = (t-1)^n\times(t+1)^n$. Les fonctions $g_n : t\mapsto (t+1)^n$ et $h_n : t\mapsto (t-1)^n$ étant polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Aussi, par la formule de Leibniz, nous avons:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left(g_n(t)h_n(t)\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_n^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t) = g_n(t)h_n^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} g_n^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t).$$

Or, 1 est une racine d'ordre n de $h_n(t) = (t-1)^n$. Aussi, pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, nous avons $h_n^{(n-k)}(1) = 0$. En évaluant le polynôme précédent en 1, nous obtenons alors:

$$\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\right](1) = g_n(1)\times h_n^{(n)}(1).$$

Reste à évaluer ces polynômes en 1. $g_n(1) = 2^n$ et puisque $h_n(t) = (t-1)^n$ est un polynôme de degré n, nous déduisons que $h_n^{(n)}$ est un polynôme constant, égale à $n!$.
Il s'ensuit que $P_n(1) = \frac{1}{2^n \times n!} \times 2^n \times n! = 1$.

1.e. Soit f une fonction paire et dérivable définie sur I, un intervalle réel centré en 0. Alors, pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, nous obtenons en dérivant cette relation: $-f'(-x) = f'(x)$, soit encore $f'(-x) = -f'(x)$. Cette relation étant vraie pour tout réel $x \in I$, nous déduisons que la fonction f' est impaire (sur I).

1.f.

> **Méthode** Les relations $P_n(-1) = (-1)^n$ et $P_n(1) = 1$ (question d) doivent nous faire penser que P_n est de même parité que n. Le texte indique que la dérivée d'une fonction paire est impaire, il faut ici prendre l'initiative de démontrer que la dérivée d'une fonction impaire est paire (résultat à connaître).

La fonction $t \mapsto (t^2-1)^n$ est une fonction paire. Aussi, par **1.e.**, la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt}(t^2-1)^n$ est une fonction impaire.
Montrons que la dérivée de toute fonction impaire et dérivable est une fonction paire. Soit f une telle fonction: ainsi, pour tout $x \in I$ (I désignant toujours un intervalle réel centré en 0), nous avons: $f(-x) = -f(x)$. En dérivant cette relation, nous obtenons: $-f'(-x) = -f'(x)$, soit $f'(-x) = f'(x)$. Aussi la fonction f' est-elle paire.
En appliquant ce résultat à la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt}(t^2-1)^n$, nous déduisons que la fonction $t \mapsto \frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^n$ est une fonction paire. En réitérant ce procédé, nous obtenons que la fonction $t \mapsto \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n$ est de même parité que k (i.e. est paire si k l'est et impaire si k l'est). Il s'ensuit alors que la fonction P_n est de même parité que n. En utilisant **1.d.**, nous obtenons que $P_n(-1) = (-1)^n$.

2.a. *Question non évidente à rédiger car il y a deux indices n et k.*
L'idée est d'utiliser une intégration par partie puis d'itérer le processus k fois (si vous l'avez vue, c'est bien!). Formellement, on fait une récurrence finie sur l'indice k variant de 0 à n.
Soit n un entier naturel fixé, et procédons par récurrence finie sur l'entier naturel k variant de 0 à n.
Initialisation: $k = 0$. Supposons $f \in E$. Alors, nous avons: $(f|P_n) = \int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 f(t)\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)} dt$. Nous en déduisons alors que la formule est vraie au rang $k = 0$.
Hérédité: Supposons la formule vraie pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ et démontrons-là au rang $k+1$. Soit $f \in E$ une fonction $(k+1)$ fois dérivable et à dérivée $(k+1)$-ième continue. Alors, elle est en particulier k-fois dérivable et à dérivée k-ième continue, d'où par l'hypothèse de récurrence:

$$(f|P_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^1 f^{(k)}(t)\left[(t^2-1)^n\right]^{(n-k)} dt.$$

Posons alors $u(t) = f^{(k)}$, $v(t) = \left[(t^2-1)^n\right]^{(n-k-1)}$. Ces fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$, nous déduisons, par intégration par partie, que:

$$(f|P_n) = \left[\frac{(-1)^k}{2^n n!}f^{(k)}(t)\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\left((t^2-1)^n\right)\right]_{-1}^1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!}\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(t)\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\left((t^2-1)^n\right) dt.$$

Or, 1 et -1 étant toute deux des racines d'ordre n du polynôme $(t^2-1)^n$, nous déduisons $\left[f^{(k)}(t)\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\left((t^2-1)^n\right)\right]_{-1}^1 = 0$. Aussi, nous obtenons $(f|P_n) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!}\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(t)\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\left((t^2-1)^n\right) dt$: la formule est donc vraie au rang $k+1$.
Aussi, nous en déduisons, par une récurrence finie sur l'entier k que, pour tout entier naturel n et pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, nous avons pour $f \in E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$:

$$(f|P_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^1 f^{(k)}(t)\left[(t^2-1)^n\right]^{n-k} dt.$$

2.b. *Il suffit d'appliquer la formule précédente, en faisant bien attention à ne pas se tromper dans les indices!*
Soient m et n deux entiers naturels différents. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $0 \leqslant n < m$. En utilisant alors la formule **2.a.** pour $k = n+1 \leqslant m$, nous obtenons:

$$(P_n|P_m) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^m \times m!}\int_{-1}^1 P_n^{(n+1)}(t)\left[(t^2-1)^m\right]^{m-n-1} dt.$$

Or, le polynôme P_n est de degré n, d'où $P_n^{(n+1)} = 0$ ce qui implique que $(P_n|P_m) = 0$. Aussi, les polynômes P_n et P_m sont-ils orthogonaux si $n \neq m$.

Considérons alors la famille $\mathcal{F} = (P_0, \cdots, P_m)$. C'est une famille de $m+1$ polynômes échelonnés, donc elle est libre et maximale dans $\mathbb{R}_m[X]$ (espace vectoriel de dimension $m+1$). Aussi la famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

2.c.

Ici encore, il faut faire attention aux indices!... Les notations sont assez piègeuses... On utilise la formule **2.a.** *mais le k a prend ici la valeur $k+1$ et $f(t) = t^k$, afin de faire apparaître $f^{(k+1)}(t) = 0$.*

Soit $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. On désigne donc par t^k la fonction polynomiale $t \mapsto t^k$. En utilisant la formule **2.a.** avec $f(t) = t^k$, nous obtenons:

$$(f|P_n) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) \left[(t^2-1)^n\right]^{n-k-1} dt.$$

Or, la fonction $f(t) = t^k$ est une fonction polynomiale de degré k, d'où $f^{(k+1)} = 0$. D'où $(f|P_n) = 0$. Aussi, le polynôme P_n est orthogonal aux polynômes t^k pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$.

3. *Question très longue: il y a beaucoup de choses à démontrer ici! Il faut donc procéder par étapes et ne pas hésiter à revenir au sujet pour voir si l'on a pas oublié une partie de la question.*

Nous savons que le polynôme P_n est de degré n. Aussi, les polynômes $(2n+1)tP_n(t)$ et $(n+1)P_{n+1}(t)$ ont $n+1$ pour degré. Nous savons alors que la différence de ces deux polynômes est un polynôme de degré au plus $n+1$. Etudions le coefficient de t^{n+1} de ce polynôme. Les coefficients dominants de $(2n+1)tP_n(t)$ et $(n+1)P_{n+1}(t)$ sont respectivement $(2n+1)\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ et $(n+1) \times \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!^2}$. Aussi, le coefficient de t^{n+1} du polynôme différence est égal à:

$$(2n+1)\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} - (n+1)\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!^2} = \frac{(2n+1)!}{2^n(n!)^2} - \frac{(2n+1)!}{2^n(n!)^2} = 0.$$

Nous déduisons alors que le polynôme $(2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)$ est de degré au plus n.

Soit $k \leqslant n-2$. Par linéarité du produit scalaire, nous avons:

$$\left((2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)|t^k\right) = (2n+1)\left(tP_n(t)|t^k\right) - (n+1)\left(P_{n+1}(t)|t^k\right).$$

Nous savons déjà que $P_{n+1}(t)$ est orthogonal à t^k (avec $k < n+1$), d'où:

$$\left((2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)|t^k\right) = (2n+1)\left(tP_n(t)|t^k\right) = (2n+1)\int_{-1}^{1} t^{k+1}P_n(t)dt = (2n+1)\left(P_n|t^{k+1}\right).$$

Or, $k+1 < n$ (puisque $k \leqslant n-2$) donc par **2.b.** nous savons que P_n est orthogonal à t^{k+1}. Il s'ensuit donc que le polynôme $Q(t) = (2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)$ est orthogonal aux polynômes t^k pour $k \in \{0, \cdots, n-2\}$.

Nous savons que la famille $\mathcal{F} = (P_0, \cdots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[t]$ (question **2.b.**) aussi, puisque le polynôme $(2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)$ est de degré au plus n, il existe $(n+1)$ réels $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ tels que

$$(2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(t) = \lambda_0 P_0(t) + \lambda_1 P_1(t) + \cdots + \lambda_n P_n(t).$$

Pour pour entier naturel $k \in \{0, \cdots, n-2\}$, le polynôme P_k est combinaison linéaire des polynômes $\{t^0, t^1, \cdots, t^{n-2}\}$ d'où nous déduisons par linéarité du produit scalaire que $\forall k \in \{0, \cdots, , n-2\}$, $(Q|P_k) = 0$. Il s'ensuit alors que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$ et donc le polynôme Q est combinaison linéaire des polynômes P_n et P_{n-1}.

Il existe donc deux réels, λ et μ tels que $(2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t) = \lambda P_n(t) + \mu P_{n-1}(t)$. En évaluant ces deux polynômes en 1 et (-1), nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{ll} (2n+1) - (n+1) & = \lambda + \mu \\ (2n+1)(-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}(n+1) & = \lambda(-1)^n + \beta(-1)^{n-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} n & = \lambda + \mu \\ n & = -\lambda + \beta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = 0 \\ \mu & = n \end{array}\right.$$

Il en résulte alors que $(2n+1)tP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t) = nP_{n-1}(t)$, soit encore

$$(2n+1)tP_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t). \quad (1)$$

4.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous savons que le polynôme P_n est de degré n; comme $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ nous déduisons l'existence de $(n+1)$ réels $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ tels que $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$. Alors, nous avons:

$$(P_n|P_n) = (P_n|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (P_n|t^k).$$

Or, nous savons que le polynôme P_n est orthogonal aux polynômes t^k pour $0 \leqslant k < n$, donc nous déduisons:

$$(P_n|P_n) = \alpha_n(P_n|t^n) = \alpha_n \int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt.$$

Il suffit alors de remarque que α_n est le coefficient dominant du polynôme P_n, et est donc égal (question **1.b.**) à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ pour déduire la formule demandée.

4.b. *Ici, pas facile; la première idée est d'obtenir une une relation de récurrence entre $(P_n|P_n)$ et $(P_{n+1}|P_{n+1})$, mais cela ne marche pas. Puis la bonne idée: utiliser le résultat de la question précédente!*
En appliquant la relation de récurrence (1), nous obtenons:

$$\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1} t^{n-1}\left((n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t)\right)dt = \frac{1}{2n+1}\left((n+1)(t^{n-1}|P_{n+1}) + n\int_{-1}^{1} t^{n-1}P_{n-1}(t)\right)dt.$$

Le produit scalaire $(t^{n-1}|P_{n+1})$ est nul (car P_{n+1} est orthogonal à t^{n-1}) et nous pouvons exprimer la dernière intégrale grâce à **4.a.** Nous obtenons alors:

$$\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}(P_n|P_n) = \frac{n}{2n+1} \times \frac{2^{n-1}(n-1)!^2}{(2n-2)!}(P_{n-1}|P_{n-1}).$$

En simplifiant l'expression, nous obtenons: $(P_n|P_n) = \frac{2n-1}{2n+1}(P_{n-1}|P_{n-1})$.

A présent, itérons cette formule; nous obtenons:

$$(P_n|P_n) = \frac{2n-1}{2n+1}\frac{2n-3}{2n-1}(P_{n-2}|P_{n-2}) = \cdots = \frac{2n-1}{2n+1} \times \cdots \times \frac{3}{5}(P_1|P_1).$$

Nous constatons que les produits se simplifient de proche en proche; calculons $(P_1;P_1)$. $(P_1|P_1) = \int_{-1}^{1} t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$. Aussi, nous obtenons: $(P_n|P_n) = \frac{3}{2n+1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{2n+1}$.

5.a. $G_n(t) = \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\,\frac{d}{dt}\left(P_n(t)\right)\right]$. Nous savons que le polynomôme P_n est de degré n. Aussi, le polynôme $(1-t^2)\,\frac{d}{dt}P_n(t)$ est un polynôme de degré $2+(n-1) = n+1$. Aussi, le polynôme G_n est-il de degré n.

Les fonctions considérées étant toutes polynomiales, elles sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1;1]$ d'où nous pouvons utiliser une intégration par parties sur ce segment; nous obtenons, pour tout $0 < k < n$:

$$(G_n(t)|t^k) = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\,\frac{d}{dt}P_n(t)\right]t^k dt = \left[(1-t^2)t^k\,\frac{d}{dt}P_n(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} k(1-t^2)t^{k-1}\,\frac{d}{dt}P_n(t)dt.$$

Le premier terme du membre de droite est nul puisque le polynôme $(1-t^2)$ s'annule en 1 et -1. Aussi, en utilisant une seconde intégration par partie (on considère les fonctions $\begin{cases} u(t) = k(1-t^2)t^{k-1} & u'(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{k-1}(1-t^2)\right) \\ v'(t) = \frac{d}{dt}P_n(t) & v(t) = P_n(t) \end{cases}$, nous obtenons:

$$(G_n(t)|t^k) = -k\left[(1-t^2)t^{k-1}P_n(t)\right]_{-1}^{1} + k\int_{-1}^{1}\frac{d}{dt}\left(t^{k-1}(1-t^2)\right)P_n(t)dt = k\left(\frac{d}{dt}t^{k-1}(1-t^2)|P_n(t)\right).$$

Remarquons que le polynôme $t^{k-1}(1-t^2)$ est de degré $k+1$ et donc le polynôme $\frac{d}{dt}t^{k-1}(1-t^2)$ est de degré k. Or, nous savons que le polynôme P_n est orthogonale à tous les polynômes t^k avec $k < n$, d'où nous déduisons que $\left(\frac{d}{dt}t^{k-1}(1-t^2)|P_n(t)\right) = 0$.
Pour $k = 0$, nous avons: $(G_n(t)|1) = \int_{-1}^{1} G_n(t)dt = \left[(1-t^2)\frac{d}{dt}P_n(t)\right]_{-1}^{1} = 0$.
Il s'ensuit que, pour tout $k \in \{0,\cdots,n-1\}$, $(G_n(t)|t^k) = 0$ et donc le polynôme G_n est bien orthogonal aux polynômes t^k pour $0 \leqslant k < n$.

5.b. Nous savons que P_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant égale à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Aussi le coefficient dominant du polynôme $\frac{d}{dt}P_n(t)$ est $n \times \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Aussi, $(1-t^2)\,\frac{d}{dt}P_n(t)$ est un polynôme de degré $n+1$ de coefficient dominant $(-n) \times \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. En le dérivant, on obtient un polynôme de degré n et de coefficient dominant égale à $(-n) \times (n+1) \times \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

5.c. *Question peu évidente: il faut utiliser la définition de la fonction G_n et l'exprimer en fonction de P_n.* Soit k un entier naturel compris entre 0 et $n-1$. Alors, le polynôme P_k est de degré k, donc est combinaison linéaire des polynômes t^i pour $i \in \{0,\cdots,k\}$. Or, par **5.a.**, le polynôme G_n est orthogonal à ces polynômes, d'où, par linéarité du produit scalaire nous déduisons qu'il est orthogonal avec le polynôme P_k. Ainsi, pour tout $k \in \{0,\cdots,n-1\}$, $(G_n \mid P_k) = 0$.

Or, G_n est un polynôme de degré n, donc est combinaison linéaire des polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (puisque, par **2.b.**, la famille $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ est une base orthogonale de $R_n[X]$). Or, G_n est orthogonal aux polynômes P_k pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ d'où $G_n = \lambda P_n$. Pour déterminer le coefficient λ, il suffit de considérer le coefficient dominant des polynômes G_n et P_n; par **1.c.**, le coefficient dominant de P_n est $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, alors que le coefficient dominant de G_n est $-n(n+1)\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ (question **5.b.**). Cela implique donc $\lambda = -n(n+1)$, soit $G_n(t) = -n(n+1)P_n$.

Finalement, partons de la définition $G_n(t) = \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}\left(P_n(t)\right)\right] = -n(n+1)P_n$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables, nous déduisons que:

$$G_n(t) = -2t\frac{d}{dt}P_n(t) + (1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}P_n(t).$$

Il s'ensuit donc que le polynôme P_n est solution de l'équation différentielle

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0.$$

6.a. Nous savons que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_n$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, nous savons qu'à tout triplet $(y_0, y_0'; t_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]-1;1[$, il existe une unique solution f de (E_n) telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$. Aussi, il suffit d'appliquer deux fois cette propriété pour les triplets $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ pour obtenir l'existence de deux solutions, notées respectivement y_1 et y_2, telles que $\left\{\begin{array}{ll} y_1(0) & =1 \\ y_1'(0) & =0 \end{array}\right.$ and $\left\{\begin{array}{ll} y_2(0) & =0 \\ y_2'(0) & =1 \end{array}\right.$.
Il reste à montrer que la famille $(y_1; y_2)$ est une base de $\mathcal{S}_n$.
Pour cela, considérons deux réels α et β tels que la combinaison linéaire $\alpha y_1 + \beta y_2$ soit la fonction nulle. Alors, en évaluant cette fonction en 0, nous obtenons d'une part $\alpha = 0$. D'autre part, en dérivant la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ et en évaluant la fonction obtenue en 0, nous obtenons $\beta = 0$. Aussi, la famille $(y_1; y_2)$ est libre. De plus, l'espace $\mathcal{S}_n$ est de dimension 2, donc cette famille est libre et maximale: c'est donc une base de $\mathcal{S}_n$.

6.b. i. Supposons donc que $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k t^k$ est une fonction développable en série entière. Si $y \in \mathcal{S}_n$, alors $(1-t^2)y''(t) - 2ty' + n(n+1)y = 0$. Or, nous avons:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k; \quad y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k t^{k-1}; \quad y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\alpha_k t^{k-2}.$$

Aussi, en remplaçant les fonctions par leurs développement en séries entières, nous obtenons:

$$(1-t^2)\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\alpha_k t^{k-2}\right) - 2t\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k t^{k-1}\right) + n(n-1)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k\right) = 0.$$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\alpha_k t^{k-2}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left[-k(k-1) - 2k + n(n+1)\right]t^k = 0.$$

Dans la première série entière, on effectue un changement d'indice pour obtenir: $\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\alpha_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\alpha_{k+2}t^k$. Nous obtenons alors:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)\alpha_{k+2} - [k(k+1) - n(n+1)]\alpha_k\right)t^k = 0.$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, nous avons $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+2)(k+1)\alpha_{k+2} = [k(k+1) - n(n+1)]\,\alpha_k$.

Nous vérifons alors que cette condition est suffisant, c'est-à-dire que si une série entière vérifie cette dernière relation, alors elle est solution de (E_n).

ii. Nous pouvons remarquer que la relation de récurrence **6.b.i** sur les coefficients (α_k) implique que s'il existe un entier naturel j pour lequel $\alpha_j = 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{j+2k} = 0$. De plus, en remplace k par n dans cette relation, nous obtenons que $\alpha_{n+2} = 0$: aussi, tous les coefficients de même parité que n sont-ils nuls à partir du rang $n+2$.
Considérons la fonction y_1. Nous savons que $\alpha_1 = 0$ puisque $y_1'(0) = \alpha_1 = 0$. Aussi, nous en déduisons que tous les coefficients de y_1 de rang impair sont nuls. On montre de même que le coefficient constant dans le D.S.E. de y_2 est nul, ce qui implique que tous les coeffients de rang pair de sont développement en série entière sont nuls.
Pour montrer le résultat souhaité, nous allons raisonner par dichotomie selon la parité de l'entier naturel n.

Premier cas: Supposons que n est pair. Alors, tous les coefficients $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rang pairs sont nuls à partir du rang $n+2$. Il s'ensuit donc que y_1 est un polynôme (car à partir du rang $n+1$, tous les coefficients de son D.S.E. sont nuls). D'autre part, nous savons que tous les coefficients de rang pair dans le D.S.E. de y_2 sont nuls. Il s'ensuit donc que $y_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+1}t^{2k+1}$.

> **Méthode** Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n$ présente tous les termes de rang pair nuls (elle est dite lacunaire), il n'est pas possible de faire directement le la règle de d'Alembert sur celle-ci (le quotient n'est pas défini). Deux possibilités: soit on applique la règle de d'Alembert à la série numérique de terme général $\alpha_{2k+1}t^{2k+1}$, soit on considére une série entière auxiliaire dont on étudie le rayon de convergence puis en déduit celui de la série entière initiale.

Alors par la règle de d'Alembert appliquée à la série numérique (à termes positifs), nous avons: $\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{2k+1}|\,t^{2k+1}$. Nous avons alors:

$$\left|\frac{\alpha_{2k+2}t^{2k+3}}{\alpha_{2k+1}t^{2k+1}}\right|=\left|\frac{(2k+2)(2k+3)-n(n+1)}{(2k+3)(2k+4)}t^2\right|\to t^2.$$

Le critère de d'Alembert (pour les séries numériques à termes positifs) indique que cette série converge si $t^2<1$, donc la série entière $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+1}t^{2k+1}$ admet un rayon de convergence égal à 1.
Second cas: n est impair. Dans ce cas, nous déduisons que c'est y_2 qui est un polynôme. Considérons alors le D.S.E. de $y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}t^{2k}$. Introduisons la série entière auxiliaire $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}t^k$. D'après le critère de d'Alembert (pour les séries entières), nous avons: $\frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}}=\frac{2k(2k+1)-n(n+1)}{(2k+-1)(2k+2)}\to 1$, d'où cette série entière admet 1 pour rayon de convergence. On en déduit alors que la série entière $y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}t^{2k}$ admet $\sqrt{1}=1$ pour rayon de convergence.

Nous avons donc démontré que, selon la parité de n, l'une des deux fonctions y_1 ou y_2 est un polynôme est l'autre est D.S.E. sur $]-1;1[$.

iii. Nous déduisons de la précédente question que les fonctions y_1 et y_2 sont développables en séries entières sur $]-1;1[$. Or, comme toute solution f de (E_n) est combinaison linéaire des fonctions y_1 et y_2, nous déduisons que toute fonction solution de (E_n) est développable en série entière, qui a pour rayon de convergence au moins 1. Il s'ensuit que toute fonction solution de (E_n) est D.S.E. sur $]-1;1[$.

6.c. *Question délicate: l'expression n'est pas évidente à obtenir (il faut forcer l'expression), et il faut ensuite appliquer la règle de Raabe-Duhamel.* Supposons n pair. Nous avons déjà vu que dans ce cas, la fonction y_1 est polynomiale. Notons alors $y_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k t^{2k+1}$ (i.e. $v_k=\alpha_{2k+1}$). Nous avons alors:

$$\frac{v_{k+1}}{v_k}=\frac{(2k+1)(2k+2)-n(n-1)}{(2k+2)(2k+3)}=\frac{2k+1}{2k+3}-\frac{n(n+1)}{2(k+1)(2k+1)}=1-\frac{2}{2k+3}+O(\frac{1}{k^2}).$$

Or, $\frac{2}{2k+3}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+\frac{2}{2k+3}=\frac{1}{k}+\frac{-2k+3+2k}{k(2k+3)}=\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Nous en déduisons donc que $\frac{v_{k+1}}{v_k}=1-\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
Supposons à présent n impaire. Notons $y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k t^{2k}$ (i.e. $u_k=\alpha_{2k}$). Nous avons alors:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}}=\frac{2k(2k+1)-n(n+1)}{(2k+1)(2k+2)}=1-\frac{1}{k+1}+O(\frac{1}{k^2}).$$

De même, nous avons: $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k}+\frac{-(k+1)+k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k}\right)$ ce qui nous permet d'obtenir l'expression désirée.

En appliquant la règle de Raabe-Duhamel, nous déduisons alors la convergence des séries numériques $\sum_{k\geqslant 0}u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0}v_k$.

Théorème 1 (*Règle de Raabe-Duhamel*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
- *S'il existe des réels $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $\beta\in]1;+\infty[$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, alors la série $\sum u_n$ converge pour $\alpha\leqslant 1$ et diverge pour $\alpha>1$.*
- *S'il existe un réel $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum u_n$ converge pour $\alpha<1$ et diverge pour $\alpha>1$ (pour $\alpha=1$, on ne peut rien dire).*

Remarque: On donne ici les deux versions de la règle de Raabe-Duhamel. Généralement, c'est la seconde version que l'on utilise (cas $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)$), mais ici, c'est la première (cas avec $O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ qui est suffisante.

6.d. Supposons que n est pair. Alors, la fonction y_1 est polynomiale de degré k et y_2 est une série entière. Soit alors $y\in\mathcal{S}_n$ continue sur $[-1;1]$. Comme $(y_1;y_2)$ est une base de $\mathcal{S}_n$, il existe deux réels α et β tels que $y=\alpha y_1+\beta y_2$. En faisant tendre t vers 1 par valeur inférieur, les limites de $y(t)$ et $y_1(t)$ sont finies, alors que la limite de $y_2(t)$ est infinie. Aussi en déduisons-nous que $\beta=0$, et donc $y=\alpha y_1$.
On obtient un résultat similaire dans le cas où n est impaire en échangeant les rôles de y_1 et y_2.

6.e. *Un autre couac: pourquoi les fonctions sont-elles à valeurs dans $[-1;1]$? Pour P_n ok, mais pour les autres? Je ne vois pas trop; étant donné qu'il s'agit d'un s.e.v. alors $10^{1000}P_n$ est aussi élément de ce s.e.v.*

Il résulte de **6.d.** que, par exemple pour n pair, toute solution de (E_n) continue sur $[-1;1]$ est proportionnelle à y_1. Aussi, l'ensemble des solutions continues sur $[-1;1]$ solution de (E_n) est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Comme par **5.c.** la fonction P_n est solution de cette équation différentielle et est continue sur $[-1;1]$, nous déduisons que cet espace vectoriel est engendré par y_1.

Partie II

1.a.

Théorème 2 (*Théorème de Rolle*)

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

1.b. *Question classique de localisation des racines réelles d'un polynôme par le théorème de Rolle et un peu d'arithmétique des polynômes. La difficulté est de pouvoir rédiger quelque chose de correct en peu de temps. On pourra revoir avec profit la première partie du Capes de 1999 sur la méthode de Newton.*
Le polynôme $(t^2-1)^n=(t-1)^n(t+1)^n$ admet deux racines $\{1,-1\}$, chacune d'ordre n. Notons $A(t)=(t-1)^n$ et $B(t)=(t+1)^n$. En utilisant la formule de Leibniz, nous avons:

$$P(t)=\frac{d^k}{dt^k}\left(A(t)B(t)\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^{(j)}B^{(k-j)}.$$

Nous pouvons calculer facilement les polynômes $A^{(j)}$ et $B^{(k-j)}$. En effet, nous avons $A^{(j)}(t)=\frac{n!}{j!}(t-1)^{n-j}$ et donc 1 est une racine d'ordre $n-j$ de ce polynôme. D'autre part, $B^{(k-j)}(t)=\frac{n!}{(n-k+j)!}(t+1)^{n-k+j}$ et -1 est une racine d'ordre $n-k+j$ de ce polynôme. En remplaçant ces expresions dans la formule de Leibniz, nous obtenons:

$$P(t)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{n!}{j!}\frac{n!}{(n-k+j)!}(t-1)^{n-j}(t+1)^{n-k+j}.$$

Dans cette dernière expression, nous pouvons factoriser par $(t-1)^{n-k}(t+1)^{n-k}$, d'où 1 et -1 sont des racines d'ordre $n-k$ du polynôme P.

Soit k un entier naturel strictement plus petit que n, et posons l'hypothèse $\mathcal{H}(k)$ suivante : $\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n$ admet k zéros disctincts dans $]-1;1[$. Démontrons cette propriété par récurrence finie sur l'entier naturel k.
Pour $k=0$, c'est évident puisque par convention, $f^{(0)}=f$.
Pour $k=1$; considérons la fonction $f(t)=(t^2-1)^n$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynomiale. De plus, $f(-1)=f(1)=0$. Aussi, d'après le théorème de Rolle, il existe un élément $c_1\in]-1;1[$ tel que $f'(c)=0$. Aussi, la propriété est vraie pour $k=1$.
Supposons à présent cette propriété vraie pour $k\in\{1,\cdots,n-2\}$, et démontrons-là au rang $k+1$. Par hypothèse de récurrence, la fonction $t\mapsto\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n$ admet k racines distinctes $\{a_1,\cdots,a_k\}$ telles que $-1<a_1<a_2<\cdots<a_k<1$. De plus, nous savons que cette fonction s'annule en 1 et -1 Aussi, en posant $a_0=-1$ et $a_{k+1}=1$, nous pouvons utiliser le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$ pour $i\in\{0,\cdots,k\}$. On déduit l'existence de $k+1$ réels $(c_0,\cdots c_k)$, tels que $c_i\in]a_i;a_{i+1}[$ et $f'(c_i)=0$ pour tout $i\in\{0,\cdots,k\}$. Comme les intervalles $]a_i;a_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, on déduit que les $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ sont deux à deux distincts. La propriété $\mathcal{H}(k+1)$ est donc vraie. Aussi, par le principe de récurrence, on déduit que, pour tout $k\in\{0,\cdots,n-1\}$, la fonction $\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n$ admet k zéros distincts sur $]-1;1[$.

1.c. Il suffit de prolonger le raisonnement utilisant le théorème de Rolle pour $k=n$. La fonction $t\mapsto\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n$ admet donc $n-1$ racines distinctes sur $]-1;1[$ et s'annule en 1 et -1. Nous pouvons donc appliquer n fois le théorème de Rolle pour en déduire l'existence de n racines distinctes de P_n dans l'intervalle $]-1:1[$.
Note: La différence entre le cas $k=n$ et le cas $k<n$ est que 1 et -1 ne sont plus racines de P_n puisque nous savons, par ailleurs, que $P_n(1)=1$ d'où 1 n'est pas une racine de P_n, idem pour -1).

2.a. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[-1;1]$. La fonction $t\mapsto\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}$ est définie sur $[-1;1]\setminus\{x\}$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet union d'intervalles. Etudions alors la limite quand $t\to x$. La fonction $t\mapsto P_n(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1;1]$. En particulier, elle est dérivable en x et nous avons: $\lim_{t\to x}\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}=P_n'(x)$. Aussi la fonction $t\mapsto\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}$ admet un prolongement par continuité en x (la valeur de cette fonction en .

2.b. La fonction $t \mapsto \frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}$ étant continue sur $[-1;1]$ elle est intégrable sur cet intervalle. Aussi la fonction $Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}dt$ est bien définie.
Nous savons que P_n est un polynôme de degré n, aussi, notons $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ son écriture dans la base $\{t^0, t^1, \cdots, t^n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. En utilisant une identité remarquable, nous obtenons:

$$P_n(t) - P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t^k - x^k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t-x)\left(t^{k-1} + t^{k-2}x + t^{k-3}x^2 + \cdots + tx^{k-2} + x^{k-1}\right).$$

On en déduit alors que $\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j t^{k-1-j}$ et par suite

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t-x}dt = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \frac{t^{k-j}}{k-j}\right]_{-1}^{1}.$$

La fonction $Q_n(x)$ est donc bien une fonction polynôme de degré $n-1$ en x.
Etudions les cas $n = 0$ et $n = 1$. Nous savons que $P_0(t) = 1$ d'où $Q_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $P_1(t) = t$ d'où $Q_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{t-x}{t-x}dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$.

2.c. *Formulation étonnante: pourquoi ne pas écrire ce qu'il faut démontrer? Attention à ne pas confondre le t (variable muette d'intégration) et x (c'est la variable de $Q_n(x)$). Il faut faire preuve d'un peu d'astuce: en partant du membre de droite et en utilisant le linéarité de l'intégrale, on obtient des simplifications.*
Montrons donc que $(2n+1)xQ_n(x) = (n+1)Q_{n+1}(x) + xQ_{n-1}(x)$. Partons du membre de droite:

$$\begin{aligned}(n+1)Q_{n+1}(x) + nQ_{n-1}(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{(n-1)P_{n+1}(t)+nP_{n-1}(t)}{t-x} - \frac{(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)}{t-x}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{(2n+1)tP_n(t)-(2n+1)xP_n(x)}{t-x}dt \\ &= (2n+1)\int_{-1}^{1} \frac{(t-x)P_n(t)+x(P_n(t)-P_n(x))}{t-x}dt \\ &= (2n+1)\int_{-1}^{1} P_n(t)dt + (2n+1)x\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}dt\end{aligned}.$$

Nous savons que $\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \left[\frac{1}{2^n \times n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\right]_{-1}^{1} = 0$ puisque 1 et -1 sont des racines d'ordre n du polynôme $(t^2-1)^n$.
Nous déduisons donc que Q_n vérifie la relation $(n+1)Q_{n+1}(x) + nQ_{n-1}(x) = (2n+1)xQ_n(x)$.

3.a. *Question très classique ici sur les polynômes interpolateurs de Lagrange...*
Supposons que $k = i$. Alors, $L_i(t) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$. Sinon, $k \neq i$ et alors $L_i(a_k) = 0$ (l'un des facteurs du produit est nul car de la forme $\frac{a_k - a_k}{a_i - a_k}$ pour $j = k$).

3.b. Montrons déjà que la famille $(L_1, \cdots, L_n)$ est libre. Supposons l'existence de réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. Evaluons cette fonction polynomiale en a_k (pour $k \in \{1, \cdots, n\}$). Nous avons alors:

$$\lambda_1 L_1(a_k) + \lambda_2 L_2(a_k) + \cdots + \lambda_n L_n(a_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = 0.$$

Aussi en déduisons-nous que tous les coefficients $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont nuls. La famille $(L_1, \cdots, L_n)$ est donc libre. De plus, c'est une famille libre de n éléments appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[t]$, qui est un espace vectoriel de dimension n: aussi, cette famille est maximale. Nous en déduisons alors que c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[t]$.

3.c. *Il faut connaître ou savoir retrouver ce résultat!*
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[t]$. Considérons le polynôme $P(t) - \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i(t)$. Ce polynôme s'annule en chaque a_k puisque $(P - \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i)(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i(a_k) = P(a_k) - P(a_k) = 0$. Aussi, ce polynôme est le polynôme nul (car il possède n racines alors qu'il est de degré $n-1$). Il s'ensuit donc que $P(t) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i(t)$. Nous obtenons ici la décomposition du polynôme P sur la base des polynômes $(L_1, \cdots, L_n)$.

3.d. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[t]$. Décomposons ce polynôme dans le base de polynômes de Lagrange. Nous avons alors: $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_i)L_i$. Nous avons alors par linéarité de l'intégrale (les fonctions considérées sont continues sur $[-1;1]$, donc intégrables):

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{n} P(a_i)L_i(t)dt = \sum_{k=1}^{n} P(a_i)\int_{-1}^{1} L_i(t)dt.$$

Il suffit alors de poser $\lambda_i = \int_{-1}^{1} L_i(t)dt$ pour obtenir l'existence de cette suite.
Montrons à présent l'unicité de celle-ci. Supposons qu'il existe une suite $(\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout polynôme

$P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$, $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' P(a_i)$. Montrons que $\lambda_i = \lambda_i'$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Pour cela, considérons $P = L_k$. Nous déduisons alors que $\int_{-1}^{1} L_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' L_k(a_i) = \lambda_k'$. Aussi nous retrouvons bien la définition de λ_k, ce qui implique l'unicité d'une telle suite.

3.e. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Effectuons la division euclidienne de P par P_n: il existe donc un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = QP_n + R$ et $deg(R) < deg(P_n) = n$, c'est-à-dire $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$. Nous avons alors:

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t) \times P_n(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt = (Q|P_n) + \int_{-1}^{1} R(t)dt.$$

Nous pouvons déjà remarquer que comme P est de degré au plus $2n-1$ et que $deg(P_n) = n$, alors $deg(Q) \leqslant n-1$. Or, nous savons par **I.2.c.** que P_n est orthogonal aux polynômes t^k avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Il s'ensuit donc (par linéarité du produit scalaire) que $(Q|P_n) = 0$.
A présent, intéressons-nous au polynôme $R(t)$. Comme il appatient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, nous savons qu'il se décompose dans la base des polynômes interpolateurs de Lagrange: $R(t) = \sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i(t)$. Or, nous savons que $P(t) = Q(t)P_n(t) + R(t)$. Comme les réels a_i sont les racines du polynôme P_n, nous obtenons: $P(a_i) = P_n(a_i)Q(a_i) + R(a_i) = R(a_i)$. Il s'ensuit que $R(t) = \sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i(t)$. Nous obtenons alors, en utilisant la définition des λ_i de **3.d.**:

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\lambda_i.$$

3.f. Considérons le polynôme constant $P(t) = 1$. Nous avons alors, par la précédente formule:

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i P(a_i) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2.$$

4. Nous avons démontré dans la question **2.a.** que le polynôme $\frac{P_n(t)-P_n(x)}{t-x}$ est de degré $n-1$ en x. Par symétrie des indices, il est aussi de degré $n-1$ en t. Aussi, en tant que fonction polynomiale en t, il admet une décomposition dans la base des polynômes interpolateurs de Lagrange. Plus précisément, nous avons:

$$\frac{P_n(t) - P_n(x)}{t-x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(a_i) - P_n(x)}{a_i - x} L_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x - a_i} L_i(t).$$

La dernière simplification étant obtenue puisque les $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les racines de P_n. En intégrant cette relation, nous obtenons:

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t-x} dt = \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x - a_i} L_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x - a_i} \int_{-1}^{1} L_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x - a_i} \lambda_i.$$

5.a. Considérons le polynôme (en t) $P(t) = \frac{t^{2n} - x^{2n}}{x-t}$ (c'est bien un polynôme puisque l'on reconnaît la factorisation classique: $t^{2n} - x^{2n} = (t-x)(t^{2n-1} + t^{2n-2}x + t^{2n-3}x^2 + \cdots + t^2x^{2n-3} + t^{2n-2}x + t^{2n-1})$). Il est, en tant que polynôme en t, de degré $2n-1$ d'où nous pouvons appliquer la question **3.e.**. Aussi nous avons:

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^{2n} - x^{2n}}{x-t} dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{a_i^{2n} - x^{2n}}{x - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i a_i^{2n}}{x - a_i} - x^{2n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

Nous reconnaissons alors dans le dernier terme le quotient $\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ (c.f. question **4.**).

5.b. Soit $x > 1$. Partons de la précédente égalité. Nous avons alors:

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{x^{2n}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i a_i^{2n}}{x - a_i} - \int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}}{x-t} dt \right] + \frac{1}{x^{2n}} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{x-t} dt.$$

Nous pouvons aisément calculer cette dernière intégrale après simplification par x^{2n}. Nous obtenons alors: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-t} dt = [\ln(x-t)]_{-1}^{1} = \ln(x-1) - \ln(x+1) = \ln \frac{x-1}{x+1}$. En retranchant ce terme aux deux membres de l'égalité, nous déduisons la formule désirée.

5.c. Majorons la valeur absolue du membre de droite. Déja, pas l'inégalité triangulaire, nous avons *(Puisque $x > 1$, les fonctions intégrées sont positives; on ne fait donc pas apparaître la valeur absolue lorsque cela n'est pas nécessaire)*:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i a_i^{2n}}{x-a_i}-\int_{-1}^{1}\frac{t^{2n}}{x-t}dt\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{x-a_i}+\int_{-1}^{1}\frac{t^{2n}}{x-t}dt.$$

Nous savons que, pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$, $-1<a_i<1$. Il s'ensuit que $\frac{1}{x-a_i}<\frac{1}{x-1}\leqslant\frac{1}{\alpha}$. Aussi, nous avons la majoration

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{x-a_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}.$$

D'autre part, pour tout $t\in[-1;1]$ on a: $\frac{1}{x-t}\leqslant\leqslant\frac{1}{x-1}\leqslant\frac{1}{\alpha}$. Aussi nous obtenons la majoration de l'intégrale suivante:

$$\int_{-1}^{1}\frac{t^{2n}}{x-t}dt\leqslant\frac{1}{\alpha}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1}\leqslant\frac{2}{(2n+1)\alpha}\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

En sommant ces deux majorations, nous déduisons que

$$\left|\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}-\ln\frac{x+1}{x-1}\right|\leqslant\frac{3}{\alpha(1+\alpha)^{2n}}.$$

5.d. La suite $\frac{3}{\alpha(1+\alpha)^{2n}}$ converge vers 0 quand $n\to+\infty$ (on reconnait le terme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{(1+\alpha)^2}<1$). Aussi en déduisons-nous la convergence uniforme de la suite $(U_n)_{n\geqslant1}$ sur l'intervelle $[1+\alpha;+\infty[$ vers la fonction $x\mapsto\ln\frac{x+1}{x-1}$.

Fin.